РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Кафедра «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Р. В. Шамин

Абстрактные параболические задачи: теория полугрупп, теория интерполяции, функционально-дифференциальные уравнения

Москва, 2006

Оглавление

Введение

Настоящее учебное пособие возникло на основе лекционных курсов, которые автор читал в течение нескольких лет в Московском авиационном институте и продолжает читать в Российском университете дружбы народов на кафедре «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Учебное пособие адресовано студентам старших курсов и аспирантам, специализирующимся в теории дифференциальных уравнений в частных производных, функциональном анализе и теории функционально-дифференциальных уравнений.

Основное внимание уделено абстрактным параболическим уравнениям в гильбертовых пространствах. Уравнения такого типа возникают во многих интересных задачах математики и физики, например, в случайных процессах, в задачах нелинейной оптики и в теории плазмы. В то же время абстрактные дифференциальные уравнения справедливо занимают отдельное место в области функционального анализа, поскольку современные методы их исследования требуют применения различных разделов функционального анализа. В главе 1 мы приводим постановки изучаемых задач, основные определения и пространства.

Разрешимость параболических задач во многом обеспечивается результатами теории эллиптических задач. Однако для эффективного применения эллиптической теории в параболических задачах необходимо использовать специальные методы. Наиболее эффективным средством для связи между эллиптическими и параболическими задачами является теория полугрупп операторов. Эта эффективность обеспечивается естественностью теории полугрупп в параболических задач. Действительно, как правило, если (автономное) параболическое уравнение является разрешимым, то его решения могут быть представлены через полугруппу операторов.

В главе 2 излагаются основы теории полугрупп операторов и показаны методы применения этой теории в параболических задачах. Хотя теория полугрупп получила развитие в 50-х прошлого столетия в работах Э. Хилле, К. Иосиды, Р. Филлипса, В. Феллера, Т. Като, С. Г. Крейна, П. Е. Соболевского и многих других, в учебниках, посвященных уравнениям в частных производных, изложение методов теории полугрупп — явление редкое. Удачным исключением является учебник [11]. Рассмотрение же сильных решений (с помощью теории полугрупп) еще более редкое явление даже в монографической литературе. Наиболее известной монографией, где изучаются сильные решения является монография [21], где в полной мере последовательно изучены полугруппы и их применения. С современной точки зрения сильные решения рассматриваются в книге [20]. Заметим, что известные монографии [4–6, 19] по теории полугрупп полностью посвящены классическим операторным решениям.

Параболические задачи обладают и специфическими «параболическими» проблемами. Одной из наиболее важной и трудной проблемой является точное описание пространства начальных данных. Под пространством начальных данных мы понимаем те начальные значения, для которых существуют сильные решения. Эта проблема нетривиальна и для классических уравнений, но еще более принципиально сложной является проблема описания пространства начальных данных для функционально-дифференциальных уравнений. Описание пространств начальных данных может быть выполнено в терминах теории полугрупп (см. [20]). Однако исчерпывающее описание пространств начальных данных получается применением методов теории интерполяции гильбертовых пространств.

Теория интерполяции гильбертовых (или, более обще, банаховых пространств) представляет собой абстрактную теорию на стыке функционального анализа, теории функций и функциональных пространств. Эта область математики, несмотря на свою абстрактность, а порой и изрядную сложность, является удивительным сочетанием различных разделов математики от теории экстремальных задач до комплексного анализа. Теория интерполяции пространств не только красивая и неожиданная теория, но и очень эффективное средство в современной математике. В частности, с использованием этой техники получено исчерпывающее описание пространств начальных данных. К сожалению, теория интерполяции изложена практически исключительно в монографиях (см. [1, 7, 10, 17]). К тому же это изложение зачастую перегружено общими случаями, что сильно затрудняет ее изучение студентами. В главе 3 мы следуем изложению в [10], где теория интерполяции изложена для случая гильбертовых пространств, что существенно доступнее для начального изучения.

После того, как мы вооружены теорией полугрупп и теорией интерполяции, мы приступаем к получением результатов о сильной разрешимости и описанию пространств начальных данных (глава 4). Результаты, приведенные в разделе 4.4, получены автором в [18], и позволяют конструктивно описать пространства начальных данных.

В главе 5 мы приводим примеры параболических задач, для которых применимы результаты раздела 4.4. Наиболее успешно эти результаты могут быть применены в теории функционально-дифференциальных уравнений. Функционально-дифференциальные уравнения представляют не только теоретический интерес в теории дифференциальных уравнений, но и имеют интересные приложения в таких разделах, как нелинейная оптика, нелокальные задачи и многих других.

С методическими и научными материалами, сопровождающими спецкурс, посвященный абстрактным параболическим задачам, можно ознакомиться на следующем сайте: `http://www.lector.ru`.

Автор с благодарностью примет любые замечания и пожелания по следующим адресам: `http://www.shamin.ru`, `roman@shamin.ru`.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А. Л. Скубачевскому за внимание к написанию пособия, а главное, за многолетнюю совместную работу, в результате которой автор надеется считать себя ученым. Автор также благодарен М. А. Скрябину за неоценимую помощь при наборе пособия.

Глава 1

Постановка параболических задач

1.1. Абстрактные параболические задачи

Пусть V и H — сепарабельные гильбертовы пространства и V плотно и непрерывно вложено в H. Отождествим пространство H с его сопряженным; тогда мы получим

$$V \subset H \subset V',$$

где каждое пространство плотно в последующем.

Рассмотрим непрерывный оператор $A : V \to V'$.

Определение 1.1. Оператор A называется V-*коэрцитивным*, если для любого $v \in V$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\langle Av, v\rangle \geqslant c_1 \|v\|_V^2, \tag{1.1}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от v.

В дальнейшем будем мы предполагать, что оператор A является V-коэрцитивным.

Замечание 1.1. В силу теоремы 9.1 [10, глава 2] оператор A взаимнооднозначно отображает V на V'.

Рассмотрим полуторалинейную форму $a[u, v]$ в H, определенную по формуле

$$a[u, v] = \langle Au, v\rangle$$

с областью определения $\mathcal{D}(a) = V$. В силу (1.1) форма a является замкнутой секториальной формой в V. Действительно, для произвольного $u \in V$ мы имеем

$$|\operatorname{Im} a[u, u]| \leqslant |a[u, u]| \leqslant c_2 \|u\|_V^2.$$

Из последнего неравенства и из (1.1) следует, что числовая область значения $\Theta(a)$ лежит в секторе

$$\Theta(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \theta_1, \operatorname{Re} \lambda > 0\}, \tag{1.2}$$

где $\theta_1 = \operatorname{arctg}(c_2/c_1) < \pi/2$.

В силу теоремы о представлении (см. теорему 2.1 [5, глава 6]) существует замкнутый, плотно определенный, секториальный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H \to H$, порожденный формой $a[\cdot]$, такой, что $(\mathcal{A}u, v)_H = a[u, v]$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $v \in V$. Очевидно, $\mathcal{A}u = Au$, когда $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in V : Au \in H\}$.

Будем рассматривать область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v)_H + (u, v)_H. \tag{1.3}$$

Через I обозначим связное подмножество вещественной оси, а через Y гильбертово пространство. Обозначим через $L_2(I; Y)$ пространство функций f со значениями в Y, измеримых на I относительно меры Лебега и таких, что

$$\int\limits_I \|f(t)\|_Y^2 dt < \infty.$$

Как обычно, отождествляя функции равные почти всюду, введем в пространстве $L_2(I; Y)$ скалярное произведение по формуле

$$(f, g)_{L_2(I;Y)} = \int\limits_I (f(t), g(t))_Y dt.$$

Стандартным методом можно показать, что пространство $L_2(I; Y)$ является гильбертовым пространством.

Введем еще пространство $C^k(\overline{I}; Y)$ — непрерывно дифференцируемых вплоть до порядка k на $\overline{I}$ функций со значениями в гильбертовом пространстве Y. Пространство $C^k(\overline{I}; Y)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_{C(\overline{I};Y)} = \sum_{\alpha=0}^{k} \sup_{t \in \overline{I}} \|u^{(\alpha)}(t)\|_Y.$$

Будем рассматривать дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t) \qquad (t \in (0, T)) \tag{1.4}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{1.5}$$

где $0 < T < \infty$, $f \in L_2(0, T; H)$ и $\varphi \in H$.

Определение 1.2. Функция $u \in L_2(0, T; V)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.4)–(1.5), если для любой функции $v \in C^1([0, T]; V)$ такой, что $v(T) = 0$ выполнено интегральное равенство

$$\int\limits_0^T (-(u(t), v'(t))_H + a[u(t), v(t)])dt = (\varphi, v(0))_H + \int\limits_0^T (f(t), v(t))_H dt.$$

Пример 1.1 (уравнение теплопроводности)**.** Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Пусть в нашем примере $H = L_2(Q)$, $V = \mathring{H}^1(Q)$, тогда $V' = H^{-1}(Q)$. Можно показать (см. [10]), что пространство $H^{-1}(Q)$ состоит из обобщенных производных первого порядка функций из $L_2(Q)$, более того $\|u_{x_i}\|_{H^{-1}(Q)} \leqslant c\|u\|_{L(Q)}$, $i = 1, \ldots, n$. В качестве оператора $\mathcal{A}$ возьмем оператор Лапласа с условиями Дирихле. Для этого введем оператор $A = -\Delta : \mathring{H}^1(Q) \to H^{-1}(Q)$, действующий в смысле обобщенных производных. Очевидно, что этот оператор будет непрерывным. Покажем, что оператор A является $\mathring{H}^1(Q)$-коэрцитивным.

Для произвольной $u \in \mathring{H}^1(Q)$ возьмем последовательность $\{u_k\} \subset \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $\|u_k - u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$. Для функции u_k имеем

$$\langle Au_k, u_k\rangle = (-\Delta u_k, u_k)_{L_2(Q)} = (\nabla u_k, \nabla u_k)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u_k\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

В силу плотности пространства $\dot{C}^\infty(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ отсюда следует, что

$$\langle Au, u\rangle \geqslant c_1 \|u_k\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

Задача (1.4)–(1.5) в нашем примере представляет собой первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а обобщенное решение совпадает с обобщенным решением из класса $L_2(0,T;\mathring{H}^1(Q)) \subset H^{1,0}(Q\times(0,T))$.

1.2. Сильные решения

Обобщенные решения имеют важное значение в исследовании разрешимости задач, в обосновании численных методов и в ряде других важных вопросов. Однако по сути обобщенные решения не удовлетворяют собственно уравнению (1.4) и условию (1.5). Рассмотрение же классических решений сужает класс, в котором ищется решение, и налагает излишние ограничения на правые части и коэффициенты уравнения. При этом многие задачи математической физики требуют рассмотрения разрывных правых частей. Удобным компромиссом является рассмотрение сильных решений. Сильные решения удовлетворяют уравнению (1.4) «почти всюду» при минимальных ограничениях на правую часть, начальную функцию и коэффициенты. Для определения сильных решений нам потребуется определить операцию дифференцирования в смысле обобщенных функций со значениями в гильбертовом пространстве.

Введем пространство основных функций $\mathcal{D}(I;H)$ как множество бесконечно дифференцируемых функций на I со значениями в H, с компактным в I носителем. Пространство $\mathcal{D}(I;H)$ является пространством Фреше с топологией, заданной системой полунорм:

$$p_{K_i,m}(\varphi) = \sup_{t\in K_i, \alpha\leqslant m} \|D^\alpha \varphi(t)\|_H,$$

где K_i — последовательность компактов в I, такая что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i = I$. Через $\mathcal{D}'(I;H)$ обозначим линейное пространство всех линейных ограниченных функционалов над пространством $\mathcal{D}(I;H)$. Пространство $\mathcal{D}'(I;H)$ будем называть *пространством распределений.* А элементы $\mathcal{D}'(I;H)$ будем называть *распределениями* или обобщенными функциями.

Пусть $T \in \mathcal{D}'(I;H)$, $\varphi \in \mathcal{D}(I;H)$ тогда через $\langle T, \varphi\rangle$ будем обозначать значение функционала T на φ. Для любого $T \in \mathcal{D}'(I;H)$ определим обобщенную производную $\dfrac{dT}{dt}$ равенством

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{d\varphi}{dt}\right\rangle \qquad \text{для всех } \varphi \in \mathcal{D}(I;H).$$

Итерируя, можно определить производную любого порядка от распределения.

Поскольку любая функция из $L_2(I;H)$ определяет некоторый линейный ограниченный функционал на $\mathcal{D}(I;H)$ по формуле

$$\langle f, \varphi\rangle = (f,\varphi)_{L_2(I;H)}, \tag{1.6}$$

то имеют место следующие вложения

$$\mathcal{D}(I;H) \subset L_2(I;H) \subset \mathcal{D}'(I;H).$$

Те элементы пространства $\mathcal{D}'(I;H)$, которые допускают представление в виде формулы (1.6) будем называть *регулярными функциями.*

Определение 1.3. Обобщенное решение $u(t)$ задачи (1.4)–(1.5) называется *сильным решением*, если $u' \in L_2(0,T;H)$, где производная по t понимается в смысле обобщенных функций.

При рассмотрении сильных решений удобно ввести пространство сильных решений. Определим гильбертово пространство

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) = \{w \in L_2(0,T;\mathcal{D}(\mathcal{A})) : w' \in L_2(0,T;H)\}$$

со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathcal{W}(\mathcal{A})} = \int\limits_0^T (u',v')_H\,dt + \int\limits_0^T (\mathcal{A}u,\mathcal{A}v)_H dt + \int\limits_0^T (u,v)_H dt,$$

где производные по t понимаются в смысле распределений со значениями в $L_2(0,T;H)$.

Предоставляем читателю показать, что обобщенное решение u является сильным решением тогда и только тогда, когда $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$.

1.3. Пространства начальных данных

Как уже отмечалось, для существования сильных решений на правые части и начальную функцию необходимо налагать дополнительные условия. Что касается функции из правой части уравнения (1.4), то необходимым условием существования сильного решения является принадлежность этой функции пространству $L_2(0,T;H)$. Это условие является естественным и легко проверяемым. С другой стороны, условия на начальную функцию являются довольно сложными (в нетривиальных случаях) и, зачастую, неконструктивными. Уже в простом случае уравнения теплопроводности из примера 1.1 необходимо накладывать условия на начальную функцию φ. Для случая параболических дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами в гладких областях (соответственно, допускающих гладкие решения) условия существования сильных решений были получены в работах О.А. Ладыженской, Л.Н. Слободецкого и других авторах.

Пример 1.2 (первая смешанная задача для уравнения теплопроводности)**.** Продолжим рассмотрение примера 1.1, считая границу области достаточно гладкой, либо считая, что область Q является прямоугольником. В этом случае обобщенное решение является сильным если принадлежит пространству $H^{2,1}(Q\times(0,T))$. Хорошо известно (см. [12]), что если $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$, то обобщенное решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности принадлежит $H^{2,1}(Q\times(0,T))$. Можно показать, что условие $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$ является и необходимым для существования сильного решения.

Введем определение пространства начальных данных.

Определение 1.4. *Пространством начальных данных* для задачи (1.4)–(1.5) называется множество

$$\Phi(\mathcal{A}) = \{\varphi \in H : \text{существует сильное решение задачи (1.4)–(1.5)}\}.$$

Определение 1.4 является неконструктивным, однако применяя методы теории интерполяции можно дать описание пространств начальных данных в терминах интерполяционных пространств. Для эффективного применения теории интерполяции необходимо использовать аппарат теории аналитических полугрупп. В то же время аналитические полугруппы естественным образом возникают в параболических задачах и являются одним из самых мощных средств исследования параболических задач и особенно абстрактных параболических задач.

Глава 2

Полугруппы операторов в гильбертовом пространстве

2.1. Сильно непрерывные полугруппы

Пусть в гильбертовом пространстве H задано однопараметрическое семейство T_t $(t \geqslant 0)$ ограниченных операторов.

Определение 2.1. Семейство T_t $(t \geqslant 0)$ называется *C_0-полугруппой* или *сильно непрерывной полугруппой* или просто *полугруппой*, если выполнены следующие условия:

1. $T_{t+s} = T_t T_s$ при $t, s \geqslant 0$, $T_0 = I$.
2. Функция $T_t\varphi$ непрерывна в пространстве H на $[0, \infty)$ при каждом фиксированном $\varphi \in H$.

Из определения полугруппы следует оценка нормы полугруппы.

Теорема 2.1. *Пусть T_t $(t \geqslant 0)$ — C_0-полугруппа. Тогда существуют такие константы β и $M \geqslant 1$, что выполнено неравенство*

$$\|T_t\| \leqslant M e^{\beta t}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Положим $c_1 = \sup\limits_{t \in [0,1]} \|T_t\|$. Обозначая через $[t]$ целую часть t, мы имеем

$$T_t = T_{[t]} T_{t-[t]} = (T_1)^{[t]} T_{t-[t]}$$

для любого $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\|T_t\| \leqslant c_1 e^{\beta [t]},$$

где $\beta = \ln \|T_1\|$. Следовательно,

$$\|T_t\| \leqslant M e^{\beta t}, \quad t \geqslant 0,$$

где $M = c_1$, если $\beta \geqslant 0$, и $M = c_1 e^{-\beta}$, если $\beta < 0$. $\square$

Определение 2.2. Точная нижняя грань всех чисел β, для которых верно неравенство (2.1) называется *порядком роста полугруппы*.

Определение 2.3. В случае, когда порядок роста равен нулю, а $M = 1$, то есть имеет место оценка

$$\|T_t\| \leqslant 1,$$

полугруппа называется *сжимающей.*

Пусть T_t $(t \geqslant 0)$ — C_0- полугруппа. Введем линейный, вообще говоря, неограниченный оператор G по формуле

$$G\varphi = \lim_{h\to+0} \frac{T_h\varphi - \varphi}{h},$$

определенный на таких элементах $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, для которых этот предел существует.

Определение 2.4. Определенный таким образом оператор G называется *генератором полугруппы* или *инфинитезимальным производящим оператором полугруппы* T_t $(t \geqslant 0)$.

Пример 2.1 (случай ограниченного генератора)**.** Пусть $B : H \to H$ — произвольный ограниченный оператор. Тогда можно определить семейство операторов T_t по формуле

$$T_t = I + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}B^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}B^n. \tag{2.2}$$

Этот ряд сходиться по норме операторов при всех $t \geqslant 0$, так как его члены мажорируются членами разложения в степенной ряд функции $e^{\|B\|t}$. Непосредственно можно видеть, что определенное таким образом семейство операторов является C_0-полугруппой с оператором B в качестве генератора.

2.2. Генераторы полугрупп

Из примера 2.1 видно, что любой ограниченный оператор является генератором C_0-полугруппы. Однако далеко не каждый неограниченный оператор будет генератором.

Теорема 2.2. *Генератор C_0-полугруппы имеет плотную в H область определения.*

Доказательство. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Сначала покажем, что для всех $\varepsilon > 0$ и $\varphi_0 \in H$ элементы вида

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_t\varphi_0 dt, \tag{2.3}$$

принадлежат $\mathcal{D}(G)$. Элементы (2.3) образуют плотное в H множество, так как для любого $\varphi_0 \in H$

$$\lim_{\varepsilon\to0} \|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_H \leqslant \lim_{\varepsilon\to0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \|T_t\varphi_0 - \varphi_0\|_H dt = 0.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{T_h - I}{h}\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon h}\int_0^\varepsilon (T_{t+h}\varphi_0 - T_t\varphi_0)dt =$$

$$\frac{1}{\varepsilon h}\left\{\int_h^{\varepsilon+h} T_t\varphi_0 dt - \int_0^\varepsilon T_t\varphi_0 dt\right\} = \frac{1}{\varepsilon h}\left\{\int_\varepsilon^{\varepsilon+h} T_t\varphi_0 dt - \int_0^h T_t\varphi_0 dt\right\},$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T_h - I}{h}\varphi_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon - I}{\varepsilon}\varphi_0\right\|_H = 0.$$

Мы показали, что $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(G)$ и

$$G\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon\varphi_0 - \varphi_0).$$

□

Теорема 2.3. *Пусть T_t и G — соответственно C_0-полугруппа и генератор этой полугруппы. Тогда оператор-функция T_t преобразует область определения $\mathcal{D}(G)$ в себя и имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt}(T_t\varphi) = GT_t\varphi = T_tG\varphi, \tag{2.4}$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, $t \geqslant 0$.

Доказательство теоремы следует из очевидного равенства

$$\frac{T_h - I}{h}T_t\varphi = T_t\frac{T_h - I}{h}\varphi$$

путем предельного перехода. □

Теорема 2.4. *Генератор C_0-полугруппы является замкнутым оператором.*

Доказательство. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(G)$ такую, что φ_k и $G\varphi_k$ сходятся в H к пределам φ_0 и y_0 соответственно. Из (2.4) следует, что при $h > 0$ имеем

$$\frac{1}{h}(T_h\varphi_k - \varphi_k) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h (T_t)'\varphi_k dt = \frac{1}{h}\int\limits_0^h T_tG\varphi_k dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$ (и фиксированном h), получаем

$$\frac{1}{h}(T_h\varphi_0 - \varphi_0) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h T_t y_0 dt.$$

Устремим теперь h к нулю. Передел в правой части существует и равен y_0, следовательно, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(G)$ и $G\varphi_0 = y_0$. □

2.3. Спектральные свойства генераторов полугрупп

Через $R(\lambda, G)$ мы будем обозначать резольвенту оператора G, то есть

$$R(\lambda, G) = (\lambda I - G)^{-1}$$

для тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых существует ограниченный оператор $(\lambda I - G)^{-1}$. Когда это не приводит к путанице, мы будем сокращать запись: $R(\lambda) = R(\lambda, G)$.

Оказывается, на спектр генераторов полугрупп необходимо налагаются существенные условия. В частности, эти условия связаны с порядком роста полугруппы.

Теорема 2.5. *Пусть* T_t — C_0*-полугруппа, а* β_0 *есть ее порядок роста. Тогда множество* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \beta_0\}$ *принадлежит резольвентному множеству оператора* G*. Причем*

$$R(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > \beta_0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \beta > \beta_0$. Тогда существует такое $M(\beta)$, что выполнено неравенство (2.1), поэтому интеграл

$$J(\lambda)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt$$

равномерно и абсолютно сходится и определяет ограниченный оператор.

Поскольку оператор G замкнут, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = J(\lambda)(\lambda I - G)\varphi = \varphi$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Фиксируем λ ($\operatorname{Re}\lambda \geqslant \beta$) и $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Из равенства

$$(\lambda I - G)T_t\varphi = T_t(\lambda I - G)\varphi \tag{2.6}$$

следует, что функция $e^{-\lambda t}(\lambda I - G)T_t\varphi$ интегрируема на $[0, \infty)$. Далее, в силу замкнутости оператора $\lambda I - G$ имеем

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda I - G)T_t\varphi dt = \lambda J(\lambda)\varphi - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t)'\varphi dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$(\lambda I - G)J(\lambda)\varphi = \lambda J(\lambda)\varphi + \varphi - \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt =$$
$$= \lambda J(\lambda)\varphi + \varphi - \lambda J(\lambda)\varphi = \varphi.$$

Из (2.6) следует, что

$$J(\lambda)(\lambda I - G)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t(\lambda I - G)\varphi dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda I - G)T_t\varphi dt = \varphi.$$

□

Следствие 2.1. *В условиях теоремы* 2.5 *имеют место следующие формулы*

$$\frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k} = (-1)^k \int\limits_0^\infty t^k e^{-\lambda t} T_t \varphi dt, \tag{2.7}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > \beta_0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Формулы (2.7) следуют из того, что все интегралы в (2.7) абсолютно сходятся. □

2.4. Теорема Хилле—Иосиды и ее обобщения

Ранее мы получили ряд необходимых свойств генераторов полугрупп. Сейчас мы рассмотрим вопрос о критериях для генераторов C_0-полугрупп.

Теорема 2.6. *Замкнутый оператор G, имеющий плотную область определения является генератором C_0-полугруппы тогда и только тогда, когда существует такое число λ_0, что все числа λ, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$ являются резольвентными для оператора G, и для этих чисел выполнено неравенство*

$$\|(R(\lambda))^k\| \leqslant \frac{c_1}{(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_0)^k}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.8}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от k.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Тогда из теоремы 2.5 следует, что если $\operatorname{Re}\lambda > \beta_0$, где β_0 — порядок роста, то λ принадлежит резольвентному множеству. Поскольку резольвента является аналитической оператор-функцией на резольвентном множестве, то в силу вида коэффициентов ряда Тейлора и формулы (2.7), мы имеем формулу

$$(R(\lambda))^k\varphi = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-\lambda t}T_t\varphi dt.$$

Оценивая отсюда $(R(\lambda))^k$ с помощью оценки (2.1), получаем при любом фиксированном $\beta > \beta_0$ и $\operatorname{Re}\lambda > \beta$

$$\|(R(\lambda))^k\| \leqslant \frac{M}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}e^{(\beta-\operatorname{Re}\lambda)t}dt = \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \beta)^k}.$$

Достаточность. Пусть оператор G удовлетворяет условиям теоремы. Построим полугруппу, производящим оператором которой является оператор G.

Введем ограниченные операторы (аппроксимации Иосиды)

$$G_n = nGR(n),$$

где n принимает целые значения, большие, чем λ_0. Покажем, что операторы G_n на элементах $\mathcal{D}(G)$ сходятся к G

$$\lim_{n\to\infty}\|G_n\varphi - G\varphi\|_H = 0. \tag{2.9}$$

Для этого сначала докажем, что для любого $\varphi \in H$

$$\lim_{n\to\infty}\|n(nI - G)^{-1}\varphi - \varphi\|_H = 0. \tag{2.10}$$

В случае, когда $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ имеем

$$\|n(nI - G)^{-1}\varphi - \varphi\|_H = \|R(n)G\varphi\|_H \leqslant \frac{c_1}{n - \lambda_0}\|G\varphi\|_H$$

Откуда (2.10) следует для $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Для других элементов $\varphi \in H$ справедливость (2.10) вытекает из плотности $\mathcal{D}(G)$ в H и равномерной ограниченности норм операторов $nR(n)$

$$\|nR(n)\| \leqslant |n|\|R(n)\| \leqslant \frac{c_1|n|}{n - \lambda_0}.$$

Из (2.10) и соотношения

$$G_n\varphi - G\varphi = nR(n)G\varphi - G\varphi$$

следует (2.9).

Поскольку операторы G_n ограничены, то используя ряд (2.2) из примера 2.1, определим операторы $e^{G_h t}$. Так как

$$G_n = n^2(nI - G)^{-1} - nI,$$

то

$$e^{G_n t} = e^{-nt}e^{n^2(nI-G)^{-1}t} = e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k n^{2k}}{k!}(R(n))^k.$$

С помощью неравенств (2.8) оцениваем

$$\|e^{G_n t}\| \leqslant e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k n^{2k}}{k!}\|(R(n))^k\| \leqslant c_1 e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{tn^2}{n-\lambda_0}\right)^k \leqslant c_1 e^{\left(-n+\frac{n^2}{n-\lambda_0}\right)t}.$$

Таким образом, при достаточно больших n имеем

$$\|e^{G_n t}\| \leqslant e^{\frac{n\lambda_0 t}{n-\lambda_0}} \leqslant c_2 e^{(\lambda_0+\varepsilon)t}, \tag{2.11}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число.

Покажем теперь, что последовательность ограниченных оператор $e^{G_n t}$ сходятся на всем H равномерно относительно t из каждого ограниченного отрезка $[0, t_0]$. В силу (2.11) этот факт достаточно установить для элементов φ из плотного в H множества $\mathcal{D}(G)$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Тогда при достаточно больших m и n

$$e^{G_m t} - e^{G_n t} = \int_0^t \frac{d}{ds}e^{G_n(t-s)+G_m s}\varphi ds = \int_0^t e^{G_n(t-s)+G_m s}(G_m - G_n)\varphi ds,$$

откуда в силу (2.11) получаем

$$\|(e^{G_m t} - e^{G_n t})\varphi\|_H \leqslant c_2 e^{(\lambda_0+\varepsilon)t} t\|(G_m - G_n)\varphi\|_H \leqslant c_3\|(G_m - G_n)\varphi\|_H$$

и, в силу (2.9),

$$\lim_{n,m\to\infty}\|(e^{G_m t} - e^{G_n t})\varphi\|_H = 0.$$

Следовательно, операторы $e^{G_n t}$ сходятся к пределу, который мы обозначим через T_t.

Поскольку оператор-функции $e^{G_n t}$ непрерывны и функции $e^{G_n t}$ сходятся равномерно по t, то оператор-функция T_t будет также непрерывной. Переходя к пределу в равенстве

$$e^{G_n(t+s)}\varphi = e^{G_n t}e^{G_n s},$$

получим полугрупповое соотношение $T_{t+s} = T_t T_s$. Очевидно, $T_0 = I$. Следовательно, T_t является сильно непрерывной полугруппой.

Остается показать, что генератором полугруппы T_t будет оператор G. Обозначим через $\tilde{G}$ генератор полугруппы T_t. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Переходя к пределу в равенстве

$$e^{G_n t}\varphi - \varphi = \int_0^t e^{G_n s}G_n\varphi ds,$$

получим соотношение

$$T_t\varphi - \varphi = \int\limits_0^t T_s G\varphi ds, \tag{2.12}$$

из которого следует, что $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{G})$, причем $\tilde{G}\varphi = G\varphi$ при $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. В силу теоремы 2.5 при достаточно большом $\lambda > 0$ образ оператора $(\lambda I - \tilde{G})$ совпадает со всем H, а значит, и с образом оператора $(\lambda I - G)$, что доказывает совпадение операторов $\tilde{G}$ и G. □

Непосредственная проверка условия (2.8) затруднительна. Однако существует более сильное и простое условие из которого следует условие (2.8).

Следствие 2.2. *Теорема* 2.6 *остается верной, если условие* (2.8) *заменить условием*

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda_0}. \tag{2.13}$$

В случае, когда и $\lambda_0 = 0$ это следствие носит название теоремы Хилле—Иосиды. Приведем полную формулировку.

Теорема 2.7 (Хилле, Иосида)**.** *Замкнутый оператор G, имеющий плотную область определения является генератором сжимающей C_0-полугруппы тогда и только тогда, когда все числа $\lambda > 0$ являются резольвентными для оператора G, и для этих чисел выполнено неравенство*

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Остается доказать, что получаемая полугруппа будет сжимающей. Действительно, из неравенства (2.11) вытекает, что

$$\|e^{G_n t}\varphi\|_H \leqslant e^{\frac{1}{n}}\|\varphi\|_H,$$

откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|T_t\| \leqslant 1.$$

□

2.5. Аналитические полугруппы

При рассмотрении сильных решений неоднородных параболических задач возникают аналитические полугруппы.

Определение 2.5. Сильно непрерывная полугруппа T_t называется *аналитической*, если она может быть аналитически продолжена в некоторый сектор

$$\Delta_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \delta, \operatorname{Re}\lambda > 0\}, \quad 0 < \delta \leqslant \pi/2,$$

таким образом, что T_λ непрерывна в $\overline{\Delta}_\delta$.

Определение 2.5 не очень удобно в приложениях. К счастью есть удобный критерий для аналитических полугрупп.

Определение 2.6. Сильно непрерывная полугруппа называется *аналитической*, если существуют такие числа ω и $q \geqslant 0$, что множество $\Omega_{q,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega, |\lambda| > q\}$ свободно от спектра ее генератора G, и выполнено неравенство

$$\|(\lambda I - G)^{-1}\| \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{q,\omega}. \tag{2.15}$$

Теорема 2.8. *Определения* 2.5 *и* 2.6 *эквивалентны.*

Поскольку мы не будем пользоваться теоремой 2.8, то за доказательством мы отсылаем читателя к [4, глава 9, раздел 10].

Покажем, что аналитические полугруппы необходимо возникают при рассмотрении сильных решений параболических задач. Пусть G — генератор C_0-полугруппы T_t. Рассмотрим задачу

$$u'(t) - Gu(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{2.16}$$
$$u(0) = 0. \tag{2.17}$$

Сильное решение задачи (2.16)–(2.17) понимаем в смысле определения 1.3.

Теорема 2.9. *Пусть для любого* $f \in L_2(0,1;H)$ *задача* (2.16)–(2.17) *имеет сильное решение и такое, что*

$$\|Gu(\cdot)\|_{L_2(0,1;H)} \leqslant c_1\|f\|_{L_2(0,1;H)}, \tag{2.18}$$

тогда полугруппа T_t *является аналитической полугруппой.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ и сконструируем функцию $v(t) = tT_t\varphi$. Легко проверить, что v является сильным решением задачи (2.16)–(2.17) с $f(t) = T_t\varphi$. В силу неравенств (2.18) и (2.1) следует

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|tT_t\varphi\|_H \leqslant c_2\|\varphi\|_H.$$

Отсюда, учитывая плотность области определения G в H, получаем для $t > 0$ оценку

$$\|GT_t\| \leqslant c_2 t^{-1}. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что для любого $\psi \in H$ и $t > 0$ имеем $T_t\psi \in \mathcal{D}(G)$. Покажем, что

$$\frac{d^k}{dt^k}T_t\psi = \left(\frac{d}{dt}T_{t/k}\right)^k \psi. \tag{2.20}$$

Действительно, учитывая замкнутость оператора G, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}T_t\psi = \frac{d}{dt}(GT_t)\psi = G\lim_{n\to\infty} n(T_{t+1/n} - T_t)\psi =$$

$$G(GT_t)\psi = GT_{t/2}GT_{t/2}\psi = \left(\frac{d}{dt}T_{t/2}\right)^2\psi.$$

Повторяя эти рассуждения, получаем (2.20).

Следовательно, оператор-функция T_t дифференцируемая при $t > 0$, и имеют место оценки для производных

$$\left\|\frac{d^kT_t}{dt^k}\right\| = \|G^kT_t\| \leqslant c^k k^k t^{-k}. \tag{2.21}$$

Из этих оценок следует, что существует такая константа c_2, что при $|t - t_0| < c_2 t_0$ ряд Тейлора
$$T_t = \sum_{k=0}^{\infty} (t - t_0)^k \frac{1}{k!} \frac{d^k T_{t_0}}{dt^k}$$
сходится. А это означает, что T_t может быть аналитически продолжена в сектор Δ_δ при определенном $\delta > 0$. $\square$

Замечание 2.1. Можно показать, что условие (2.19) является не только достаточным для аналитичности полугруппы, но и необходимым.

Глава 3

Теория интерполяции гильбертовых пространств

3.1. Вспомогательные утверждения

Пусть X и Y — сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что вложение $X \subset Y$ плотное и непрерывное. Для целого $m \geqslant 1$ введем гильбертово пространство

$$W^m(I; X, Y) = \{u \in L_2(I; X) : u^{(m)} \in L_2(I; Y)\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{W^m(I;X,Y)} = (u, v)_{L_2(I;X)} + (u^{(m)}, v^{(m)})_{L_2(I;Y)}, \tag{3.1}$$

где $u^{(m)}$ — производная порядка m в смысле теории распределений. Покажем, что пространство $W^m(I; X, Y)$ действительно полно относительно нормы, порожденной скалярным произведением (3.1). Пусть u_k — фундаментальная последовательность в $W^m(I; X, Y)$. Тогда в силу полноты пространства $L_2(I; X)$ последовательность сходится к $u \in L_2(I; X)$, соответственно, последовательность производных $u_k^{(m)}$ сходится к функции $v \in L_2(I; Y)$. Поскольку операция $\dfrac{d^m}{dt^m}$ непрерывна в пространстве распределений $\mathcal{D}'(I; X)$, то имеет место равенство $v = u^{(m)}$.

Методами, применяемыми в теории пространств Соболева, можно доказать теоремы о плотности пространства $D(\overline{I}; X)$ в $W^m(I; X, Y)$ и о продолжении функций из пространства $W^m(I; X, Y)$ на все $\mathbb{R}$.

3.2. Определение интерполяционных пространств

Определим в пространстве Y замкнутую, симметричную, положительную форму $t[u, v] = (u, v)_X$, $\mathcal{D}(t) = X$. Пусть T — ассоциированный с ней самосопряженный положительный оператор. Тогда оператор $\Lambda = T^{1/2}$ есть также положительный оператор в Y, и в силу теоремы 2.23 [5, глава 6] область определения $\mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{D}(t) = X$, причем $t[u, v] = (\Lambda u, \Lambda v)_Y$.

Определим теперь пространства $[X; Y]_\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ следующим образом. Положим $[X; Y]_\theta = \mathcal{D}(\Lambda^{1-\theta})$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$, где дробная степень $\Lambda^{1-\theta}$ определена для положительного оператора Λ. Пространство $[X; Y]_\theta$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{[X;Y]_\theta} = (\Lambda^{1-\theta} u, \Lambda^{1-\theta} v)_Y + (u, v)_Y.$$

Введем понятие непрерывных прямых сумм гильбертовых пространств (см. [2]). Пусть D некоторое множество, на котором задана положительная мера μ. Пусть каждой точке λ этого множества сопоставлено сепарабельное гильбертово пространство $h(\lambda)$ размерности $n(\lambda)$, где $n(\lambda)$ может принимать значения $1, 2, \ldots$ или значение ∞, причем функция $n(\lambda)$ измерима по мере μ. Разобьем множество D на измеримые подмножества $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ в каждом из которых имеет место равенство $n(\lambda) = n$. Для $\lambda \in D_n$ отождествим пространства $h(\lambda)$ с одним и тем же гильбертовым пространством h_n размерности n. Построим пространство $\mathcal{H}_n$, состоящее из таких вектор-функций $f(\lambda)$ на множестве D_n, принимающих значения в пространстве h_n, что

1. для любого элемента $g \in h_n$ числовая функция $(f(\lambda), g)_{h_n}$ измерима по мере μ,
2. числовая функция $\|f(\lambda)\|_{h_n}$ имеет интегрируемый квадрат по мере μ

$$\int\limits_{D_n} \|f(\lambda)\|^2_{h_n} d\mu(\lambda) < \infty.$$

Определим в пространстве $\mathcal{H}_n$ линейные операции, и введем скалярное произведение, положив

$$(f, g)_{\mathcal{H}_n} = \int\limits_{D_n} (f(\lambda), g(\lambda))_{h_n} d\mu(\lambda).$$

Можно показать, что $\mathcal{H}_n$ является гильбертовым пространством (см. [2]).

Обозначим теперь через $\mathcal{H}$ ортогональную прямую сумму гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n, \ldots$:

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \bigoplus \mathcal{H}_n.$$

Это гильбертово пространство мы и будем называть *непрерывной прямой суммой пространств* $h(\lambda)$ *относительно меры* μ и обозначать

$$\mathcal{H} = \int\limits_{D} \bigoplus h(\lambda) d\mu(\lambda).$$

В силу теоремы 4′ [2, глава 1, раздел 4] о спектральном разложении самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах существует такая положительная мера μ на вещественной оси и такое изометрическое вложение U пространства H в непрерывную прямую сумму $\mathcal{H}$ гильбертовых пространств относительно меры μ, что оператору Λ соответствует при этом оператор умножения на λ. Поскольку оператор Λ является положительно определенным, то существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $\mu(-\infty, \lambda_0) = 0$. Поэтому для любого $s \in \mathbb{R}$ введем гильбертово пространство $\mathcal{H}^s = \{v \in \mathcal{H} : \lambda^s v \in \mathcal{H}\}$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{H}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{D_n} \lambda^{2s} (u, v)_{h_n} d\mu(\lambda).$$

При этом пространство $X = \mathcal{D}(\Lambda)$ отобразится на гильбертово пространство $\mathcal{H}^1 = \{v \in \mathcal{H} : \lambda v \in \mathcal{H}\}$. Причем

$$U(\Lambda u) = \lambda(Uu)$$

для любой $u \in \mathcal{D}(\Lambda)$. С другой стороны, $[X; Y]_\theta = \mathcal{D}(\Lambda^{1-\theta})$ отобразится на гильбертово пространство $\mathcal{H}^{1-\theta} = \{v \in \mathcal{H} : \lambda^{1-\theta} v \in \mathcal{H}\}$.

3.3. Теоремы о следах

Начнем с теоремы, называемой *теоремой о промежуточных производных.*

Теорема 3.1. *Пусть* $u \in W^m(I; X, Y)$. *Тогда*

$$u^{(k)} \in L_2(I; [X, Y]_{k/m})$$

для $1 \leqslant k \leqslant m-1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $I = \mathbb{R}$. В этом случае можно дать другое (эквивалентное) определение пространства $W^m(\mathbb{R}; X, Y)$. Для функций из $L_2(\mathbb{R}; H)$ определим преобразование Фурье формулой:

$$F[u](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\xi) u(t) dt.$$

Тогда $u \in W^m(\mathbb{R}; X, Y)$ эквивалентно тому, что $F[u] \in L_2(\mathbb{R}; X)$ и $\xi^m F[u] \in L_2(\mathbb{R}; Y)$.

Покажем, что

$$\xi^k F[u] \in L_2(\mathbb{R}; [X; Y]_{k/m}). \tag{3.2}$$

Для $u \in L_2(\mathbb{R}; Y)$ определим Uu равенством $(Uu)(t) = U(u(t))$ почти всюду. Тогда U будет изоморфизм $L_2(\mathbb{R}; [X; Y]_\theta)$ на $L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^{1-\theta})$. Положим $v(\lambda, \xi) = U(F[u])$.

Поэтому (3.2) эквивалентно требованию

$$\lambda^{1-k/m} |\xi|^k v(\lambda, \xi) \in L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H}) \tag{3.3}$$

Используя неравенство Гельдера, получаем оценку

$$\lambda^{1-k/m} |\xi|^k \leqslant \frac{1}{p} \lambda^{(1-k/m)p} + \frac{1}{p'} |\xi|^{kp'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

где p выбираем таким образом, что $(1 - k/m)p = 1$ (тогда $kp' = m$). Из последнего неравенства следует оценка

$$\lambda^{1-k/m} |\xi|^k \leqslant c_1 (\lambda + |\xi|^m).$$

Следовательно, мы можем оценить

$$\|\lambda^{1-k/m} |\xi|^k v(\lambda, \xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H})} \leqslant c_2 \|(\lambda + |\xi|^m) v(\lambda, \xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H})}.$$

В силу того, что $u \in W^m(\mathbb{R}; X, Y)$ имеем $(\lambda + |\xi|^m) v(\lambda, \xi) \in L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, поэтому из последнего неравенства следует (3.3).

В случае, когда $I \neq \mathbb{R}$ нужно воспользоваться теоремой о продолжении в $\mathbb{R}$. □

Теорема 3.1 устанавливает суммируемость в квадрате производных функций из $W^m(I; X, Y)$. Однако, как показывает следующая теорема, в более широком пространстве производные непрерывны.

Теорема 3.2. *Пусть* $u \in W^m(I; X, Y)$. *Тогда*

$$u^{(k)} \in C(\overline{I}_1; [X, Y]_{(k+1/2)/m}),$$

где $I_1 \subset I$ *— произвольный ограниченный интервал,* $0 \leqslant k \leqslant m-1$. *Возможно, после изменения функции* $u^{(k)}$ *на множестве меры нуль.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1 без ограничения общности можно считать, что $I = \mathbb{R}$.

Возьмем произвольную $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; X)$. Вновь положим $v(\lambda, \xi) = U(F[u])$. Рассмотрим функцию $z(\xi) = \| |\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m} v(\lambda, \xi)\|_{\mathcal{H}}$. Тогда имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |z(\xi)| d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| |\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m} v(\lambda, \xi)\|_{\mathcal{H}} d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{|\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m}}{(|\xi|^m + \lambda)} (|\xi|^m + \lambda) v(\lambda, \xi) \right\|_{\mathcal{H}} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m}}{(|\xi|^m + \lambda)} \right)^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|(|\xi|^m + \lambda) v(\lambda, \xi)\|^2_{\mathcal{H}} d\xi \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|(|\xi|^m + \lambda) v(\lambda, \xi)\|^2_{\mathcal{H}} d\xi \right)^{1/2} \leqslant c_2 \|u\|_{W^m(\mathbb{R}; X, Y)},$$

поскольку, делая замену $\xi = \lambda^{1/m}\eta$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\xi|^k \lambda^{1-(k+1/2)/m}}{(|\xi|^m + \lambda)} \right)^2 d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\eta|^k}{(1 + |\eta|^m)} \right)^2 d\eta < \infty.$$

Следовательно, $z \in L_1(\mathbb{R})$. Поскольку функция, образ Фурье который принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, непрерывна (см., например, теорему 7.5 [14, глава 7]), то имеем

$$\|u^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}; [X;Y]_{(k+1/2)/k})} \leqslant c_3 \|u\|_{W^m(\mathbb{R}; X, Y)}.$$

В силу того, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}; X)$ плотно в $W^m(\mathbb{R}; X, Y)$ последнее неравенство имеет место и для $u \in W^m(\mathbb{R}; X, Y)$ □

С теоремой 3.2 тесно связана следующая важная теорема о следах.

Теорема 3.3. *Для любого $m \geqslant 1$ существует ограниченное отображение (вообще говоря, неоднозначное) поднятия $\mathcal{R} : \prod_{k=0}^{m-1} [X;Y]_{(k+1/2)/m} \to W^m(0,\infty; X, Y)$, восстанавливающее по произвольному набору $\{a_k\}_{k=0}^{m-1}$, $a_k \in [X;Y]_{(k+1/2)/m}$ функцию $u \in W^m(0,\infty; X, Y)$ такую, что $u^{(k)}(0) = a_k$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $a \in \mathcal{H}^{1-(k+1/2)/m}$ существует функция $w \in W^m(0,\infty; \mathcal{H}^1, \mathcal{H})$ такая, что $w^{(k)}(0) = a$ и имеет место неравенство

$$\|w\|_{W^m(0,\infty;\mathcal{H}^1,\mathcal{H})} \leqslant c_1 \|a\|_{\mathcal{H}^{1-(k+1/2)/m}}. \tag{3.4}$$

Возьмем функцию $\varphi \in \mathcal{D}([0,\infty), \mathbb{R})$ такую, что $\varphi^{(k)}(0) = 1$. Построим функцию w по формуле

$$w(\lambda, t) = \lambda^{-k/m} a(\lambda) \varphi(\lambda^{1/m} t).$$

Так как функция φ финитная и бесконечно дифференцируемая, то функция w принадлежит пространству $W^m(0,\infty;\mathcal{H}^1,\mathcal{H})$. Поскольку, $w^{(k)} = a(\lambda)\varphi^{(k)}(\lambda^{1/m}t)$, то $w^{(k)}(0) = a$. Покажем, что верно (3.4). Действительно,

$$\|w\|^2_{W^m(0,\infty;\mathcal{H}^1,\mathcal{H})} = \|w\|^2_{L_2(0,\infty;\mathcal{H}^1)} + \|w^{(m)}\|^2_{L_2(0,\infty;\mathcal{H})} =$$
$$= \left(\int\limits_0^\infty \|\lambda^{1-k/m}a(\lambda)\varphi(\lambda^{1/m}t)\|^2_{\mathcal{H}}dt\right)^2 + \left(\int\limits_0^\infty \|a(\lambda)\varphi^{(m)}(\lambda^{1/m}t)\|^2_{\mathcal{H}}dt\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_2(\|a\|^2_{\mathcal{H}^{1-(k+1/2)/m}} + \|a\|^2_{\mathcal{H}}) \leqslant c_3\|a\|^2_{\mathcal{H}^{1-(k+1/2)/m}}.$$

Функция $u(t) = U^{-1}(w(t))$ принадлежит пространству $W^m(0,\infty;X,Y)$ и удовлетворяет условию $u^{(m)}(0) = U^{-1}a \in [X,Y]_{(k+1/2)/m}$.

Построим функцию $V_k \in W^m(0,\infty;X,Y)$ такую, что $V_k^{(l)}(0) = 0$ при $0 \leqslant l \leqslant m-1$, $l \neq k$ и $V_k^{(k)}(0) = a_k$, где $a_k \in [X,Y]_{(k+1/2)/m}$. В силу предыдущих рассуждений существует $u_k \in W^m(0,\infty;X,Y)$ такая, что $u_k^{(k)}(0) = a_k$. Положим

$$V_k(t) = \sum_{r=1}^m c_r u_k(rt),$$

где константы c_r определяются из условий

$$\sum_{r=1}^m r^l c_r = \delta_{lk}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant m-1. \tag{3.5}$$

Условия (3.5) действительно определяют константы c_r, поскольку определитель Вандермонда в системе (3.5) не равен нулю.

Функция $V = \sum\limits_{k=0}^{m-1} V_k \in W^m(0,\infty;X,Y)$ удовлетворяет условиям $V^{(k)}(0) = a_k$. И можно положить $V = \mathcal{R}\{a_k\}_{k=0}^{m-1}$ ограниченность отображения $\mathcal{R}$ обеспечивается неравенствами (3.4). □

Замечание 3.1. В теореме 3.3 предположение $I = (0,\infty)$ является несущественным. Утверждение и доказательство остаются в силе для любого I и любой точки $t_0 \in \overline{I}$, в которой определяются следы.

Как уже отмечалось, пространство $W^m(\mathbb{R};X,Y)$ допускает эквивалентное определение через преобразование Фурье. При таком определении условие, что m является целым, не является существенным и мы сейчас дадим определение пространства $W^s(\mathbb{R};X,Y)$ для любого вещественного $s > 0$. Для целых s пространства $W^s(\mathbb{R};X,Y)$ совпадают с $W^m(\mathbb{R};X,Y)$, $s = m$.

Определим $W^s(\mathbb{R};X,Y) = \{u \in L_2(\mathbb{R};X) : |\xi|^s F[u] \in L_2(\mathbb{R},Y)\}$. В ведем в $W^s(\mathbb{R};X,Y)$ скалярное произведение

$$(u,v)_{W^s(\mathbb{R};X,Y)} = (u,v)_{L_2(\mathbb{R};X)} + (|\xi|^s F[u], |\xi|^s F[v])_{L_2(\mathbb{R};Y)}.$$

Доказанные теоремы 3.1, 3.2 и 3.3 допускают обобщение на пространства $W^s(\mathbb{R};X,Y)$.

Пространства следов допускают другое определение с использованием факторнормы.

Теорема 3.4. *Пространство $[X,Y]_\theta$ может быть определено как пространство следов $u(0)$ функций из $W^s(\mathbb{R};X,Y)$, где $s = \dfrac{1}{2\theta}$ с эквивалентной нормой следующим образом*

$$\|a\|_{[X,Y]_\theta} = \inf_{u(0)=a} \|u\|_{W^s(\mathbb{R};X,Y)}, \tag{3.6}$$

для любого $a \in [X,Y]_\theta$.

Доказательство. Возможность определения через пространства следов следует из теорем 3.2 и 3.3. Покажем эквивалентность норм. В самом деле, пространство $[X,Y]_\theta$ снабженное нормой (3.6), есть факторпространство гильбертова пространства $W^s(\mathbb{R};X,Y)$ по замкнутому подпространству таких функций $v(t)$, для которых $v(0)=0$, и, следовательно, снова гильбертово пространство. Поскольку операция взятия следа является непрерывным отображением $W^s(\mathbb{R};X,Y)\to[X,Y]_\theta$, то

$$\|a\|_{[X,Y]_\theta}\leqslant c_1\|u\|_{W^s(\mathbb{R};X,Y)}\leqslant c_1\|\!|a|\!\|_{[X,Y]_\theta}.$$

Обратное неравенство следует из ограниченности оператора поднятия $\mathcal{R}$. □

3.4. Интерполяционная теорема

Наряду с парой пространств $\{X,Y\}$, рассмотрим аналогичную пару $\{X_1,Y_1\}$ сепарабельных гильбертовых пространств. Аналогично предположим, что вложение $X_1\subset Y_1$ плотное и непрерывное.

Имеет место следующая основная в теории интерполяции теорема.

Теорема 3.5. *Пусть T — линейный оператор, удовлетворяющий условиям*

$$T\colon Y\to Y_1 \text{ — ограниченый оператор},$$

$$T\colon X\to X_1 \text{ — ограниченый оператор}.$$

Тогда

$$T\colon [X;Y]_\theta\to[X_1;Y_1]_\theta \text{ — ограниченый оператор}$$

для всех $\theta\in(0,1)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $a\in[X,Y]_\theta$, тогда согласно теореме 3.4 положим $s=\dfrac{1}{2\theta}$, тогда существует такая функция $u\in W^s(\mathbb{R};X,Y)$, что $u(0)=a$. Введем функцию $v(t)=Tu(t)$, при почти всех t. В силу свойств оператора T мы имеем

$$v\in L_2(\mathbb{R};X_1),\quad |\xi|^sF[v]=T(|\xi|^sF[u])\in L_2(\mathbb{R};Y_1).$$

Тогда имеют место оценки

$$\|v\|_{L_2(\mathbb{R};X_1)}\leqslant c_1\|u\|_{L_2(\mathbb{R};X)}$$
$$\||\xi|^sv\|_{L_2(\mathbb{R};Y_1)}\leqslant c_2\||\xi|^sF[u]\|_{L_2(\mathbb{R};Y)}.$$

Следовательно, $v\in W^s(\mathbb{R};X_1,Y_1)$ и

$$\|v\|_{W^s(\mathbb{R};X_1,Y_1)}\leqslant c_3\|u\|_{W^s(\mathbb{R};X,Y)}. \tag{3.7}$$

Тогда $v(0)\in[X_1,Y_1]_\theta$ и $v(0)=Ta$ и имеет место оценка

$$\|Ta\|_{[X_1,Y_1]_\theta}\leqslant c_4\|v\|_{W^s(\mathbb{R};X_1,Y_1)},$$

откуда, используя (3.7), получаем

$$\|Ta\|_{[X_1,Y_1]_\theta}\leqslant c_5\inf_{u(0)=a}\|u\|_{W^s(\mathbb{R};X,Y)}.$$

Отсюда, учитывая теорему 3.4 следует утверждение теоремы. □

3.5. Повторная интерполяция и двойственность

Пусть $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ такие, что $\theta_1 < \theta_2$. Из определения интерполяционных пространств следует вложение

$$[X,Y]_{\theta_1} \subset [X,Y]_{\theta_2}. \tag{3.8}$$

Теорема 3.6. *Вложение* (3.8) *является плотным.*

Доказательство. Для доказательства будем использовать изоморфизм U, определенный в разделе 3.2. Мы видим, что U есть изоморфизм пространств $[X;Y]_\theta$ и $\mathcal{H}^{1-\theta}$. При этом $\mathcal{H}^{1-\theta_1}$ плотно в $\mathcal{H}^{1-\theta_2}$. □

В силу теоремы 3.6 к паре пространств $\{[X,Y]_{\theta_1}, [X,Y]_{\theta_2}\}$ можно снова применить теорию интерполяции.

Теорема 3.7. *Для любого* $\theta \in (0,1)$ *имеет место*

$$[[X,Y]_{\theta_1}, [X,Y]_{\theta_2}]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно равенству

$$[\mathcal{H}^{1-\theta_1}, \mathcal{H}^{1-\theta_2}]_\theta = \mathcal{H}^{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2}. \tag{3.9}$$

С другой стороны пространство $\mathcal{H}^{1-\theta_1}$ есть область определения оператора умножения на $\lambda^{\theta_2-\theta_1}$ в пространстве $\mathcal{H}^{1-\theta_2}$. Следовательно, пространство $[\mathcal{H}^{1-\theta_1}, \mathcal{H}^{1-\theta_2}]_\theta$ есть область определения оператора умножения на $\lambda^{(1-\theta)(\theta_2-\theta_1)}$ в пространстве $\mathcal{H}^{1-\theta_2}$. Таким образом, $[\mathcal{H}^{1-\theta_1}, \mathcal{H}^{1-\theta_2}]_\theta$ совпадает со всеми $v \in \mathcal{H}$ такими, что $\lambda^{1-\theta}(\lambda^{(1-\theta)(\theta_2-\theta_1)}v) \in \mathcal{H}$, что и означает (3.9). □

Теорема 3.8. *Для любого* $\theta \in (0,1)$ *справедливо равенство*

$$([X,Y]_\theta)' = [Y', X']_{1-\theta}. \tag{3.10}$$

Доказательство. При доказательстве вновь используем изоморфизм U. Гильбертовы пространства Y и Y' мы можем отождествить, соответственно, отождествим $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0$. Поскольку U есть изоморфизм из X' на $\mathcal{H}^{-1}$, а также из $[X;Y]'_\theta$ на $\mathcal{H}^{\theta-1}$, то свойство (3.10) эквивалентно равенству $\mathcal{H}^{\theta-1} = [\mathcal{H}, \mathcal{H}^{-1}]_{1-\theta}$, которое само является следствием определения пространств $[X,Y]_\theta$, поскольку $\mathcal{H}$ может быть описано как область определения оператора умножения на λ в пространстве $\mathcal{H}^{-1}$. □

Глава 4

Разрешимость параболических задач

4.1. Единственность сильных решений

В постановке задачи (1.4)–(1.5) участвует оператор A. Чтобы воспользоваться теорией полугрупп для исследования разрешимости этой задачи, докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным. Тогда оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы.*

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{A}$ является секториальным, то мы можем применить теорему 3.2 [5, глава 5] и получить выполнение условия определения 2.6. $\square$

Замечание 4.1. В силу (1.2) спектр оператора $\mathcal{A}$ лежит в левой полуплоскости, и мнимая ось принадлежит резольвентному множеству.

Чтобы показать единственность сильных решений задачи (1.4)–(1.5), мы получим формулу для решений в терминах теории полугрупп.

Теорема 4.2. *Пусть оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы T_t $(t \geqslant 0)$, и пусть $u(t)$ — сильное решение задачи (1.4)–(1.5), тогда имеет место формула*

$$u(t) = T_t\varphi + \int\limits_0^t T_{t-s}f(s)ds. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для произвольных $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ имеем

$$\frac{d}{ds}\left(T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}u(s)\right) = T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}f(s).$$

Интегрируя это равенство по s от 0 до t, получаем

$$\mathcal{A}^{-1}u(t) = T_t\mathcal{A}^{-1}\varphi + \int\limits_0^t T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}f(s)ds.$$

Отсюда в силу замкнутости оператора $\mathcal{A}$ и соотношения (2.4) получаем (4.1) $\square$

Теорема 4.3. *При выполнении условий теоремы 4.2 задача (1.4)–(1.5) может иметь не более одного сильного решения.*

Доказательство теоремы следует из формулы (4.1). $\square$

Заметим еще раз, что теорема не утверждает существования сильного решения.

4.2. Неоднородные уравнения

В этом разделе будем рассматривать неоднородную задачу (1.4)–(1.5) в случае нулевых начальных условиях (1.5).

Теорема 4.4. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным оператором. Тогда для любого $f \in L_2(0,T;H)$ и $\varphi = 0$ задача* (1.4)–(1.5) *имеет сильное решение.*

Доказательство. Продолжим функцию f нулем на $\mathbb{R}$. Это продолжение также обозначим через f. Очевидно, что $f \in L_2(\mathbb{R}, H)$. Введем оператор-функцию

$$K(t) = \begin{cases} T_t, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Через $\mathcal{K}$ обозначим интегральный оператор с ядром $K(t)$. Покажем, что оператор $B : L_2(\mathbb{R}, H) \to L_2(\mathbb{R}, H)$, определенный по формуле

$$Bf(t) = \mathcal{A}\mathcal{K}f(t) = \mathcal{A}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t-s)f(s)ds,$$

ограничен. Используя преобразование Фурье, имеем

$$F[Bf](\lambda) = F[\mathcal{A}\mathcal{K}](\lambda)F[f](\lambda).$$

В силу теоремы 2.5 и замечания 4.1 имеем

$$F[\mathcal{A}\mathcal{K}](\lambda) = \mathcal{A}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-i\lambda t}dt = \mathcal{A}\int\limits_{0}^{\infty} T_t e^{-i\lambda t}dt = \mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}.$$

В силу равенства Парсеваля мы получаем

$$\|Bf\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} = \|F[Bf]\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} \leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|^2 \|F[f]\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} =$$

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} \leqslant c_1 \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)}.$$

Здесь использовано соотношение $\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = i\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} - I$ и оценка (2.15).

Покажем теперь, что

$$u(t) = \int\limits_{0}^{t} T_{t-s}f(s)ds$$

является сильным решением задачи (1.4)–(1.5). Достаточно убедиться, что $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$. Действительно, имеем

$$u'(t) = f(t) - \int\limits_{0}^{t} \mathcal{A}T_{t-s}f(s)ds.$$

В силу ограниченности оператора B и замкнутости оператора $\mathcal{A}$ мы получаем, что $u', \mathcal{A}u \in L_2(0,T;H)$. □

4.3. Уравнения с начальными условиями

С помощью теории полугрупп легко получить разрешимость однородных параболических задач по формуле (2.4). Однако применение этой формулы накладывает излишние условия на начальную функцию. Использование теории интерполяции позволяет получить точные условия на начальную функцию, гарантирующие сильную разрешимость. Используя теоремы о следах 3.3 мы сведем однородное уравнение к неоднородному уравнению с нулевыми начальными условиями.

Теорема 4.5. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным оператором, тогда для любого $f \in L_2(0,T;H)$ задача* (1.4)–(1.5) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in [H, \mathcal{D}(\mathcal{A})]_{1/2}$.*

Доказательство. Предположим, что начальная функция φ принадлежит интерполяционному пространству $[\mathcal{D}(\mathcal{A}), H]_{1/2}$. Покажем, что задача (1.4)–(1.5) имеет сильное решение. Действительно, в силу теоремы 3.3 существует такая функция $v \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$, что $u(0) = \varphi$. Рассмотрим следующую задачу для функции w

$$w'(t) + \mathcal{A}w(t) = F(t), \quad (t \in (0,T)) \tag{4.2}$$

$$w(0) = 0, \tag{4.3}$$

где $F(t) = f(t) - v' - \mathcal{A}v(t)$. Поскольку $F \in L_2(0,T;H)$, то к задаче (4.2)–(4.3) применима теорема 4.4, и существует функция $w \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$, являющаяся сильным решением задачи (4.2)–(4.3). Следовательно, функция $u = w + v$ является сильным решением задачи (1.4)–(1.5).

Пусть теперь функция $u \in \mathcal{W}(A)$ есть сильное решение задачи (1.4)–(1.5), тогда $\varphi = u(0)$ принадлежит интерполяционному пространству $[\mathcal{D}(\mathcal{A}), H]_{1/2}$ в силу теоремы 3.2. $\square$

Теорема 4.5 имеет существенный недостаток в большинстве приложений, поскольку условие $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ является неконструктивным. Действительно, описание интерполяционных пространств, за исключением редких случаев, задача очень трудная. Кроме того, во многих случаях мы не имеем конструктивного описания области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Подобная ситуация особенно характерна в теории функционально-дифференциальных уравнений.

4.4. Конструктивное описание пространств начальных данных

Рассмотрим в H форму $\overline{a}$, сопряженную к форме a. Форма $\overline{a}$ определяется по формуле $\overline{a}[u,v] = \langle A^*u, v\rangle$, где оператор A^* — сопряженный к A оператор. В силу теоремы 2.5 [5, глава 6] форма $\overline{a}$ порождает оператор $\mathcal{A}^*$, сопряженный к оператору $\mathcal{A}$. Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ будем рассматривать как гильбертово пространство со скалярным произведением аналогичным (1.3).

Теорема 4.6. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным. Предположим, что имеют место непрерывные вложения $V \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ и $V \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}$.*

Тогда $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2} = [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}$.

Доказательство. Для произвольного $u \in H$ форма $(\mathcal{A}w, u)_H$ определяет линейный непрерывный функционал f на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ по формуле $\langle w, f\rangle = (\mathcal{A}w, u)_H$. Действительно,

$$\sup_{w\in\mathcal{D}(\mathcal{A})} \frac{|(\mathcal{A}w, u)_H|}{\|w\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}} \leqslant \sup_{w\in\mathcal{D}(\mathcal{A})} \frac{\|\mathcal{A}w\|_H\|u\|_H}{(\|\mathcal{A}w\|_H^2 + \|w\|_H^2)^{1/2}} \leqslant \|u\|_H.$$

Функционал f можно представить в виде $f = \mathrm{A}_0'u$, где оператор A_0' ограничен как оператор

$$\mathrm{A}_0' : H \to (\mathcal{D}(\mathcal{A}))', \tag{4.4}$$

поскольку $\|f\|_{(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'} \leqslant \|u\|_H$.

Покажем, что $\mathcal{A}^* \subset \mathrm{A}_0'$, т.е. $\mathrm{A}_0'u = \mathcal{A}^*u$ для $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$. Пусть $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ и $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Обозначим $\mathrm{A}_0'u = f_1$ и $\mathcal{A}^*u = f_2$. Тогда

$$\langle w, f_1\rangle = (\mathcal{A}w, u)_H = (w, \mathcal{A}^*u)_H = \langle w, f_2\rangle.$$

В силу произвольности $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ мы имеем $\mathcal{A}^*u = \mathrm{A}_0'u$ в $(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$, но $\mathcal{A}^*u \in H$ и $H \subset (\mathcal{D}(\mathrm{A}^*))'$, следовательно, $\mathcal{A}^*u = \mathrm{A}_0'u \in H$ для $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$. Поскольку оператор $\mathcal{A}^*$ ограниченно отображает $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ в H, то и оператор A_0' ограничен как оператор

$$\mathrm{A}_0' : \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \to H. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) в силу интерполяционной теоремы 3.5 оператор A_0' ограничен как оператор

$$\mathrm{A}_0' : [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*), H]_{1/2} \to [H, (\mathcal{D}(\mathcal{A}))']_{1/2}.$$

Однако согласно теореме 3.8 о двойственности справедливо равенство

$$[H; (\mathcal{D}(\mathcal{A}))']_{1/2} = ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'.$$

Поэтому ограничен оператор

$$\mathrm{A}_0' : [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*), H]_{1/2} \to ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'. \tag{4.6}$$

Покажем, что $\mathrm{A}_0'u = \mathrm{A}^*u$, если $u \in V$. Возьмем $u \in V$ и $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Пусть $\mathrm{A}_0'u = f_1$ и $\mathrm{A}^*u = f_2$. Тогда

$$\langle w, f_1\rangle = (\mathcal{A}w, u)_H = \langle Aw, u\rangle = \langle w, \mathrm{A}^*u\rangle = \langle w, f_2\rangle.$$

В силу произвольности $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ мы получаем равенство $\mathrm{A}^*u = \mathrm{A}_0'u$ в $(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$, но $\mathrm{A}^*u \in V'$ и $V' \subset (\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$. Следовательно, $\mathrm{A}^*u = \mathrm{A}_0'u \in V'$.

Возьмем произвольное $f \in V'$. Тогда $u = (\mathrm{A}^*)^{-1}f \in V$ и

$$\|u\|_V \leqslant c_1\|f\|_{V'}, \tag{4.7}$$

где $c_1 > 0$ от f не зависит. По предположению теоремы $u \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}$ и

$$\|u\|_{[\mathcal{D}(\mathcal{A}^*);H]_{1/2}} \leqslant c_2\|u\|_V, \tag{4.8}$$

где $c_2 > 0$ от f не зависит.

В силу (4.6) получаем $\mathrm{A}_0'u = f \in ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'$. Учитывая (4.7), (4.8), получаем,

$$\|f\|_{([\mathcal{D}(\mathcal{A});H]_{1/2})'} \leqslant c_3\|u\|_{[\mathcal{D}(\mathcal{A}^*);H]_{1/2}} \leqslant c_3c_2\|u\|_V \leqslant c_3c_2c_1\|f\|_{V'}.$$

В силу произвольности $f \in V'$ получаем, что $V' \subset ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'$. Переходя к сопряженным пространствам, получаем, что $[\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2} \subset V$. Вместе с предположением теоремы это означает, что $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ с точностью до эквивалентности норм.

Равенство $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*); H]_{1/2}$ устанавливается аналогично. □

Глава 5

Примеры

5.1. Уравнение теплопроводности

Нам понадобится одна лемма о вложении интерполяционных пространств. Рассмотрим гильбертово пространство H_2, относительного которого будем предполагать, что вложение $H_2 \subset H$ плотно и непрерывно.

Лемма 5.1. *Предположим, что пространство H_2 непрерывно вложено в пространство H_1. Тогда имеет место непрерывное вложение $[H_2, H]_{1/2} \subset [H_1; H]_{1/2}$.*

Доказательство. Для любых $t > 0$ и $\psi \in H$ определим функционал

$$K(t, \psi; H_1, H) = \inf_{\substack{\psi_0 + \psi_1 = \psi, \\ \psi_0 \in H_1,\ \psi_1 \in H}} (\|\psi_0\|_{H_1} + t\|\psi_1\|_H).$$

В силу теоремы 15.1 [10, глава 1] имеет место равенство

$$[H_1; H]_{1/2} = \left\{ \psi \in H : \int\limits_0^\infty t^{-2} K^2(t, \psi; H_1, H) dt < \infty \right\}.$$

В силу вложения $H_2 \subset H_1$ имеет место оценка функции $K(t, \varphi; H_1, H)$ при $t > 0$

$$K(t, \varphi; H_1, H) \leqslant K(t, \varphi; H_2, H).$$

Поэтому, если $t^{-1}K(t, \varphi; H_2, H) \in L_2(0, \infty)$, то и $t^{-1}K(t, \varphi; H_1,\ H) \in L_2(0, \infty)$. Следовательно, $[H_2, H]_{1/2} \subset [H_1; H]_{1/2}$. $\square$

Рассмотрим в качестве примера уравнение теплопроводности. Необходимые и достаточные условия сильной разрешимости первой смешанной задачи для такого уравнения изучались в работах [8, 9, 16].

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей. Через Q_T обозначим ограниченный цилиндр $Q_T = Q \times (0, T)$. Мы будем обозначать через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Через $\mathring{W}_2^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$, а через $W_2^{-k}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\mathring{W}_2^k(Q)$.

Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{5.1}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0 \tag{5.2}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (x \in Q). \tag{5.3}$$

В качестве пространства H возьмем пространство $L_2(Q)$, за пространство V примем пространство $\mathring{W}_2^1(Q)$, соответственно, $V' = W_2^{-1}(Q)$. Оператор $A : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ определим по формуле $Au = -\Delta u$, где производные понимаются в смысле обобщенные производных.

Оператор A будет $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным. Действительно, для любой $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ имеет место

$$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = -\operatorname{Re}(\Delta u, u)_{L_2(Q)} = \|\nabla u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{\mathring{W}_2^1(Q)}.$$

Задачу (5.1)–(5.3) можно переформулировать как задачу (1.4), (1.5).

Очевидно, $\mathring{W}_2^2(Q)$ непрерывно вложено в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — неограниченный оператор, построенный по оператору A. В силу теоремы 11.6 [10, глава 1] имеет место равенство

$$[\mathring{W}_2^2(Q); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{W}_2^1(Q). \tag{5.4}$$

Следовательно, согласно лемме 5.1 имеем $\mathring{W}_2^1(Q) \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}); L_2(Q)]_{1/2}$ и это вложение непрерывно. В силу теоремы 4.5 мы имеем следующий результат. Задача (5.1)–(5.3) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Аналогично можно исследовать первую краевую задачу и для параболического уравнения с сильно эллиптическим оператором $2m$-го порядка.

5.2. Дифференциально-разностные уравнения

Рассмотрим применение теоремы 4.5 для параболических функционально-дифференциальных уравнений. Как уже отмечалось, такие уравнения обладают рядом принципиально новых свойств, например, гладкость сильных решений может нарушаться внутри цилиндрической области. Тем не менее, оказывается, что необходимое и достаточное условие сильной разрешимости для параболических функционально-дифференциальных уравнений совпадает с критерием сильной разрешимости уравнения теплопроводности.

Рассмотрим ограниченный оператор $A_B : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$, действующий по формуле $A_B u = -\operatorname{div}(B\nabla u)$, где $B : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ ограниченный оператор. Мы обозначили $L_2^n(Q) = \prod_{k=1}^n L_2(Q)$, $\mathring{W}_2^{1,n}(Q) = \prod_{k=1}^n \mathring{W}_2^1(Q)$, $W_2^{1,n}(Q) = \prod_{k=1}^n W_2^1(Q)$. Относительно оператора B будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 5.1. Оператор B ограниченно отображает пространство $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в пространство $W_2^{1,n}(Q)$.

Условие 5.2. Оператор A_B является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Через $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ обозначим неограниченный оператор, построенный по оператору A_B.

Рассмотрим первую смешанную задачу для параболического операторно-дифференциального уравнения.

$$u_t(x,t) + \mathcal{A}_{\mathcal{B}}u(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{5.5}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q\times(0,T)} = 0 \tag{5.6}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q). \tag{5.7}$$

Задачу (5.5)–(5.7) можно рассматривать как задачу (1.4), (1.5).

Заметим, что из выполнения условия 5.2 для оператора B следует выполнение условия 5.2 и для оператора B^*. Сопряженным к оператору $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ будет оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}$. Действительно, для любых $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}u, v)_{L_2(Q)} = -(B\nabla u, \nabla v)_{L_2^n(Q)} = (u, \mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}v)_{L_2(Q)}. \tag{5.8}$$

Так как $\dot{C}^\infty(Q)$ всюду плотно в $\mathring{W}_2^1(Q)$, тождества (5.8) справедливы для любых $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$. Следовательно $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*} \subset (\mathcal{A}_{\mathcal{B}})^*$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \subset (\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})^*$. Однако в силу $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности операторов $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}$, $0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) \cup \sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$, то по лемме 13 [3, глава 14, раздел 6] о сопряженных операторах $(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})^* = \mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}$.

Поскольку оператор B ограниченно отображает $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$, то имеет место непрерывное вложение $\mathring{W}_2^2(Q) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$. Соответственно $\mathring{W}_2^2(Q)$ непрерывно вложено в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$. В силу леммы 5.1 имеют место непрерывные вложения $\mathring{W}_2^1(Q) \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}); L_2(Q)]_{1/2}$ и $\mathring{W}_2^1(Q) \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}); L_2(Q)]_{1/2}$.

Таким образом, для задачи (5.5)–(5.7) выполнены условия теоремы 4.5, и мы имеем следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть оператор B удовлетворяет условиям* 5.1 *и* 5.2, *а оператор B^* удовлетворяет условию* 5.1.

Тогда для любого $f \in L_2(Q \times (0,T))$ задача (5.5)–(5.7) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.*

Приведем примеры операторов B для которых выполнены условия 5.1 и 5.2. Покажем, что для важных классов функционально-дифференциальных уравнений применима теорема 5.1.

Сделаем дополнительные предположения относительно области Q. Пусть граница области Q представляется следующим объединением $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{M_i}$ $(i = 1, \ldots, N_0)$, где M_i — $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q. Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup\limits_i M_i$ область Q диффеоморфна n-мерному двугранному углу, если $n \geqslant 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.

Введем ограниченные разностные операторы $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_{ijQ} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам

$$R_{ij}u(x) = \sum_{h\in M} a_{ijh}(x)u(x+h), \quad R_{ijQ}v = P_Q R_{ij} I_Q v.$$

Здесь $M \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными координатами; $a_{ijh} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции; I_Q — оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; P_Q — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

В качестве оператора B возьмем оператор $R : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$, введенный по формуле

$$(Ru)_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ijQ} u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T$.

Будем рассматривать дифференциально-разностный оператор A_R по формуле

$$A_R = -\operatorname{div}(R\nabla u).$$

Соответственно введем неограниченный оператор $\mathcal{A_R} : \mathcal{D}(\mathcal{A_R}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Для того, чтобы сформулировать условия $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора A_R, следуя [22], введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M, а через Q_r открытые связные компоненты множества $Q \setminus \left(\bigcup\limits_{h \in G} (\partial Q + h) \right)$.

Определение 5.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r — *разбиением* множества Q.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы: будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1, 2, ...)$, а l — порядковый номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([\operatorname{diam} Q] + 1)^n$.

Для того чтобы сформулировать необходимые условия $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности в алгебраической форме, мы введем матрицы $R_{ijs}(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1})$ порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x + h_{sk}), & h = h_{sl} - h_{sk} \in M, \\ 0, & h_{sl} - h_{sk} \notin M. \end{cases}$$

В силу теоремы 9.1 [22, глава 2], если оператор A_R является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным, то для всех $s = 1, 2, \dots,$ $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijs}(x) + R_{ijs}^*(x)) \xi_i \xi_j$$

положительно определены.

Пусть теперь $x \in \overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^l \in \overline{Q}$ такие, что $x^l - x \in G$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^l\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s, x)$ $\quad (I \geqslant N(s))$. Перенумеруем точки x^l так, что $x^l = x + h_{sl}$ для $l = 1, \dots, N = N(s)$, $x^1 = x$, где h_{sl} удовлетворяет условию $Q_{sl} = Q_{s1} + h_{sl}$.

Введем матрицы $A_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ с элементами $a_{lk}^{ijs}(x)$ по формуле

$$a_{lk}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x^l), & h = x^k - x^l \in M, \\ 0, & x^k - x^l \notin M. \end{cases}$$

В силу теоремы 9.2 [22, глава 2], если для всех $s = 1, 2, \dots,$ $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ijs}(x) + A_{ijs}^*(x)) \xi_i \xi_j$$

положительно определены, то оператор A_R является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Очевидно, если $I = N$, то матрица $R_{ijs}(x)$ равна матрице $A_{ijs}(x)$. Если $N < I$, то матрица $R_{ijs}(x)$ получается из матрицы A_{ijs} вычеркиванием последних $I - N$ строк и столбцов.

Рассмотрим параболическое дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x,t) + \mathcal{A}_{\mathcal{R}} u(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{5.9}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0 \tag{5.10}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q). \tag{5.11}$$

Теорема 5.2. *Пусть выполнено условие $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности для оператора $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$.*

Тогда задача (5.9)–(5.11) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.*

Доказательство. Покажем, что оператор R удовлетворяет условиям 5.1 и 5.2. Действительно, в силу леммы 8.13 [22, глава 2] оператор R непрерывно отображает $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$. А по условию теоремы оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным. Аналогично R^* удовлетворяет условию 5.1.

Таким образом к задаче (5.9)–(5.11) применима теорема 5.1. □

Пример 5.1. Рассмотрим задачу (5.9)–(5.11), предполагая, что $Q = (0, \frac{4}{3}) \times (0, \frac{4}{3})$,

$$A_R = -\operatorname{div}(R_Q \nabla u),$$

$R_Q = P_Q R I_Q$, $Ru(x) = u(x) + au(x_1+1, x_2+1) + au(x_1-1, x_2-1)$, $0 < a < 1$. Очевидно, разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей:

1. $Q_{11} = \left(0, \dfrac{1}{3}\right) \times \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, $Q_{12} = \left(1, \dfrac{4}{3}\right) \times \left(1, \dfrac{4}{3}\right)$
2. $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$.

Введем множество $\mathcal{K} \subset \partial Q$ состоящее из из четырех точек: $g^1 = \left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$, $g^2 = \left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$, $g^3 = \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, $g^4 = \left(1, \dfrac{4}{3}\right)$.

Матрицы $A_s(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1},\ s = 1,2)$ имеют вид

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \overline{Q}_{11}),$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \ (x \in \overline{Q}_{21} \cap \mathcal{K}), \quad A_2(x) = (1) \ (x \in \overline{Q}_{21} \setminus \mathcal{K}).$$

Таким образом, матрицы $A_s(x)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ $(x \in \overline{Q}_{s1}; s = 1,2)$ положительно определены. Следовательно, оператор A_R является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Согласно теореме 5.2 задача (5.9)–(5.11) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Однако в [22] доказано, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) \not\subset W_2^2(Q)$. Используя этот результат, в работе [15] было показано, что имеет место нарушение гладкости сильных решений на границе соседних подобластей $Q_{s_1 l_1} \times (0,T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0,T)$ и вблизи множества $\mathcal{K} \times (0,T)$. В этом примере область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})$ не может быть описана в терминах пространств Соболева. Тем не менее, используя подходы, предложенные в настоящей статье, мы имеем описание пространства начальных данных в виде пространства Соболева.

5.3. Уравнения с растяжением и сжатием аргументов

Введем теперь операторы растяжения и сжатия $T_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $T_{ijQ} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам

$$T_{ij}u(x) = \sum_{l\in N} a_{ijl}u(q^{-l}x), \quad T_{ijQ}v = P_Q T_{ij} I_Q v,$$

где $N \subset \mathbb{N}$ — конечное множество целых чисел; $a_{ijl} \in \mathbb{C}$; $q > 1$; операторы I_Q и P_Q определены так же, как и в разделе 5.2.

Введем оператор $T : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ по формуле

$$(Tu)_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ijQ}u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$. Возьмем в качестве оператора B оператор T и рассмотрим функционально-дифференциальный оператор A_T с растяжением и сжатием аргументов. Соответственно введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_T : \mathcal{D}(\mathcal{A}_T) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Обозначим $t_{ij}(\lambda) = \sum\limits_{l\in N} a_{ijl}\lambda^l$. В силу теоремы 1 [13], условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}(\lambda)\xi_i\xi_j > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = q^{n/2}, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n) \tag{5.12}$$

является достаточным для $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора $\mathcal{A}_T$. Если дополнительно предположить, что область Q удовлетворяет условию

$$\overline{Q} \subset qQ,$$

то в силу теоремы 2 [13] условие (5.12) является и необходимым для $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора $\mathcal{A}_T$.

Рассмотрим параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием аргументов

$$u_t(x,t) + \mathcal{A}_T u(x,t) + Cu(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{5.13}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q\times(0,T)} = 0 \tag{5.14}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q). \tag{5.15}$$

Теорема 5.3. *Пусть для оператора* T *выполнено условие* (5.12). *Тогда задача* (5.13)–(5.15) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда* $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Доказательство. Покажем, что операторы T, T^* удовлетворяют условию 5.1. Легко видеть, что операторы T, T^* ограниченно отображают $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$. По условию теоремы $\mathcal{A}_T$ и $\mathcal{A}_{T^*}$ будут $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивными.

Таким образом, к задаче (5.13)–(5.15) применима теорема 5.1. □

Пример 5.2. Пусть $Q = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу

$$u_t(x,t) - \Delta(u(x,t) + a_1 u(q^{-1}x,t)) = f(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T), \tag{5.16}$$

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0, \tag{5.17}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q), \tag{5.18}$$

где $q > 1$, $a_1 \in \mathbb{R}$.

В данном примере, условие (5.12) означает $|a_1| \leqslant q^{1-n/2}$. По теореме 5.3 задача (5.16)–(5.18) имеет сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Литература

[1] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М., Мир, 1980.

[2] Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Обобщенные функции, т. 4, Физматгиз, 1961.

[3] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т.2, М., Мир, 1966.

[4] Иосида К. Функциональный анализ. М., Мир, 1967.

[5] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972.

[6] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., Наука, 1967.

[7] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М., Наука, 1978.

[8] Ладыженская О.А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Математический сборник, т. 45, N 2, 1958, с. 123–158.

[9] Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений // Математический сборник, т. 39, N 4, 1956, с. 491–524.

[10] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир, 1971.

[11] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М., Мир, 1977.

[12] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983.

[13] Россовский Л.Е. Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки, т. 59, вып. 1, 1996, с. 103–113.

[14] Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975.

[15] Скубачевский А.Л., Шамин Р.В. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Математические заметки, т. 66, вып. 1, 1999, с. 145–153.

[16] Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленинградского гос. пед. института им А.И. Герцена, том 197, 1958, с. 54–112.

[17] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., Мир., 1980.

[18] Шамин Р.В. О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. // Математический сборник, том 194, 2003, вып. 9, с. 1411-1426.

[19] Хилле Э, Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962.

[20] Ashyralyev A., Sobolevskii P.E. Well-posedness of parabolic difference equations. Basel–Boston–Berlin, Birkhauser, 1994.

[21] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York–Berlin–Heidelberg, Springer, 1983.

[22] Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. Basel–Boston–Berlin, Birkhauser, 1997.